# 灰色系统在经济和行政决策方面的若干简单应用

刘学悦

（华东政法大学，松江，上海，20000）

**摘要**：行政决策是指国家行政机关为行使政府职能，对所要解决的问题，依法拟订方案或选择方案的过程。它是行政管理的首要环节和各项运行职能的基础。利用科学的手段进行分析从而进行科学的行政决策，是党科学发展观的具体实践，是未来行政决策的发展方向，本文分析了在贫信息情况下利用灰色系统对行政决策进行科学的预测的方法从而指导行政决策。

**关键字**：灰色系统  GM(1,1)模型  行政决策  GDP  预测

# 一、 引言

党的十七大强调了科学发展观在国家发展策略中的重要性，行政决策作为政府行政管理的首要环节，核心步骤，更要强调科学发展观，用科学的手段分析、预测行政管理中可能会出现的问题，从而指导政府的行政决策。

本文分析了利用灰色系统理论，对行政决策问题进行建模分析，预测可能的趋势，为行政决策提供科学的指导，切实贯彻党中央科学发展观精神。

# 二、 灰色系统理论基础

## 1. 灰色系统简介

1982年，中国学者邓聚龙教授创立的灰色系统理论,是一种研究少数据、贫信息不确定性问题的新方法。灰色系统理论以“部分信息已知，部分信息未知”的“小样本”、“贫信息”不确定性系统为研究对象，主要通过对“部分”已知信息的生成、开发，提取有价值的信息，实现对系统运行行为、演化规律的正确描述和有效监控，它是基于数学理论的系统工程学科。主要解决一些包含未知因素的特殊领域的问题，它广泛应用于经济、农业、地质、气象等学科，且取得了明显的效益，预测结果精度较高，可靠性较大。

灰色系统理论包括系统建模、系统预测、系统分析等方面，灰色预测方法是基于微分方程的预测，是经济中常用的一种有效预测方法，具有以下优点：

1) 少数据（一般四个数据即可建模），
2) 可检验及修正，
3) 预测结果具有良好的精确性。

灰色分析，主要是指灰色关联分析，这是一种系统中的因素分析法，是各因素间发展态势的量化比较分析，它通过对系统中各因素的结果值进行比较来分析系统中多因素间的关联程度，由此关联程度给出我们的结论。

经济指标的准确预测是国家对宏观经济正确调控的必要前提，但经济系统是一个非常复杂的系统，其中存在着时变的、非线性的、不确定性的作用关系。预测方法多种多样，如线性与非线性回归预测模型、灰色系统模型预测、马尔柯夫链预测模型、神经网络预测模型等等。

## 2. GM(1,1)模型简介

1) 称 $d^{(i)}(k_i)+ax^{(1)}(k_i)=b$ 为灰色微分型方程。

2) 若灰色微分型方程满足下列条件:
   - 信息浓度无限大
   - 序列具有灰微分内涵
   - 背景值到灰导数成分具有平射关系

则称此灰色微分型方程为灰色微分方程。

3) 方程 $x^{(0)}(k)+az^{(1)}(k)=b$ 为灰色微分方程，其中 $z^{(1)}(k)=0.5x^{(1)}(k)+0.5x^{(1)}(k-1)$

4) 称 $x^{(0)}(k)+az^{(1)}(k)=b$ 为 GM(1,1)模型。

5) 符号 GM(1,1)的含义如下：

| G | M | (1, | 1) |
|---|---|---|---|
| ↑ | ↑ | ↑ | ↑ |
| Grey | Model | 1 阶方程 | 1 个变量 |

# 三、 灰色系统理论在国内生产总值(GDP)中的应用与分析

## 1. GM(1,1)模型与线性回归模型组合步骤

设 $X^{(0)}$ 和 $Q^{(0)}$ 数据的原始序列为

$$X^{(0)}=(x^{(0)}(q(1)),x^{(0)}(q(2)),...,x^{(0)}(q(m))) \quad \cdots\cdots(1)$$

$$Q^{(0)}=((q(1)),(q(2)),...,(q(m))) \quad \cdots\cdots(2)$$

GM(1,1)模型与线性回归模型组合步骤如下：

1) 根据 $X^{(0)}$ 和 $Q^{(0)}$，建立原始序列的线性回归方程 $\hat{y}=a+bx$ 和残差序列。

2) 若某点的残差绝对值大于给定异常值ξ，则认为该点为跳变日期点，否则为非跳变日期点。

将跳变日期点和相应的跳变值分别组成跳变日期序列 $P^{(0)}$ 和跳变值序列 $X_A^{(0)}$。

$$P^{(0)}=(p^{(0)}(1),p^{(0)}(2),...,p^{(0)}(s)) \quad \cdots\cdots(3)$$

$$X_A^{(0)}=(x^{(0)}(x^{(0)}(1)),x^{(0)}(p^{(0)}(2)),...,x^{(0)}(p^{(0)}(s))) \quad \cdots\cdots(4)$$

3) 运用 GM ( 1, 1 )模型计算跳变日期序列 $P^{(0)}$ 和跳变值序列 $X_A^{(0)}$ 的预测函数 $\hat{P}^{(1)}(k+1)$ 和 $\hat{X}_A^{(1)}(k+1)$。

式中：$\hat{P}^{(1)}(k+1)=\left[p^{(0)}(1)-\mu_p/\alpha_p\right]e^{-\alpha_p^k}+\mu_p/\alpha_p$

$$\hat{X}_A^{(1)}(k+1)=\left[X^{(0)}(1)-\mu_x/\alpha_x\right]e^{-\alpha_x^k}+\mu_x/\alpha_x$$

4) 通过比较各跳变日期点的残差值，比较 GM(1,1)模型和线性回归模型预测结果。

5) 运用跳变预测函数预测跳变日期和跳变值。

$$\widehat{P^{(0)}}(k+1)=P^{(1)}(k+1)-P^{(1)}(k) \quad \cdots\cdots(5)$$

$$\widehat{X_A^{(0)}}(k+1)=X_A^{(1)}(k+1)-X_A^{(1)}(k) \quad \cdots\cdots(6)$$

6) 在进行预测时,若预测日期是跳变日期点，则运用式(5)计算跳变预测值;若预测日期不是跳变日期点，则运用 $\hat{y}=a+bx$ 计算预测值。

## 2. 对国内某省GDP预测分析的实例

对1990~2005年某省国内生产总值的线性回归直线函数进行研究，结果表明，拟合程度逐年下降。下面运用GM(1,1)与线性回归组合模型对此省省国内生产总值进行预测。

根据国内某省1990—2005年国内生产总值表（表1），以1990年为基准点“1”，得到1990—2005年的日期序列 $Q^{(0)}$=(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11,12, 13, 14, 15, 16)。

**表 1.国内某省 1990~2005 年国内生产总值（亿元）**

| 年份 Year | 序列 Sequence | 国内生产总值 GDP | 年份 Year | 序列 Sequence | 国内生产总值 GDP |
|---|---|---|---|---|---|
| 1990 | 1 | 934.65 | 1998 | 9 | 4 308.24 |
| 1991 | 2 | 1 045.73 | 1999 | 10 | 4 517.94 |
| 1992 | 3 | 1 279.75 | 2000 | 11 | 5 052.99 |
| 1993 | 4 | 1 660.18 | 2001 | 12 | 5 533.01 |
| 1994 | 5 | 2 216.83 | 2002 | 13 | 6 035.48 |
| 1995 | 6 | 2 988.37 | 2003 | 14 | 6 867.70 |
| 1996 | 7 | 3 634.69 | 2004 | 15 | 8 553.79 |
| 1997 | 8 | 4 041.09 | 2005 | 16 | 10 587.42 |

1) 生成原始序列 $X^{(0)}$ 和 $Q^{(0)}$。

$X^{(0)}$=(934.65, 1045.73, 1279.75, 1660.18, 2216.83, 2988.37, 3634.69, 4041.09, 4308.24, 4517.94, 5052.99, 5533.01, 6035.48, 6 867.7, 8553.79, 10587.42) ……(7)

$Q^{(0)}$=(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16) ……(8)

2) 作出 $X^{(0)}$ 和 $Q^{(0)}$ 的平面散点图。显然，时间变量与生产总值变量之间近似存在线性关系。根据 $X^{(0)}$ 和 $Q^{(0)}$，得到原始序列的线性回归方程

$\hat{y} = -417.580 + 558.3746x$ ……(9)

和残差序列

$\varepsilon$=(793.843, 346.549, 22.1941, -155.75, -157.475, 55.690 3, 143.636, -8.33894, -299.564, -648.238, -671.563, -749.917, -805.822, -531.977, 595.739, 2070.99) ……(10)

3) 给定异常值 ξ = 650，根据残差序列 ε，求出跳变日期原始序列 $P^{(0)}$ 以及对应的跳变原始值序列 $X_A^{(0)}$。

$P^{(0)} = (1,11,12,13,16)$ ……(11)

$X_A^{(0)} = \left(934.65, 5052.99, 6035.48, 6867.7, 10587.42\right)$ ……(12)

4) 运用GM ( 1, 1)模型计算出 $P^{(0)}$ 和 $X_A^{(0)}$ 的跳变预测函数 $\hat{P}^{(1)}(k+1)$ 和 $\hat{X}_A^{(1)}(k+1)$。

$\hat{P}^{(0)}(k+1) = 9.3569e^{0.1266k}$ ……(13)

$\hat{X}_A^{(0)}(k+1) = 3499.109e^{0.2613k}$ ……(14)

由于二者的发展系数分别为0.1266和0.2613，模拟精度很高。

5) 比较跳变序列的线性回归残差序列和GM(1, 1)模拟的残差序列（表2）。

**表 2.线性回归与 GM ( 1, 1)预测结果比较**

| 跳变序列<br>Aberrant sequence | 1 | 11 | 12 | 13 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|
| 线性回归残差<br>Linear regression error | 793.843 | -671.563 | -749.917 | -805.822 | 2 070.990 |
| GM (1,1)残差<br>GM (1,1) error | 0 | -508.985 | -134.552 | 795.354 | -636.038 |

由表2可见，GM (1, 1)拟合程度较好。尤其是2005年的国内生产总值，从误差2070.99降到-636.038，而且其他各点的残差绝对值也都有不同程度的减小。根据灰色系统理论新信息优先的原则，2005年的预测值对下一步的预测会起到很重要的作用，能够使预测值更接近于实际。由此可以看到，对于跳变日期点，用GM (1,1)模型做出的预测值精度较高，而用线性回归模型做出的预测值精度较低。从国内生产总值的原始序列也可以看到，从2003年起，国内生产总值有了较大的提高，特别是在2005年。因此，线性回归已不能较好地体现这种趋势。

6) 运用跳变函数预测下2个跳变日期和跳变值。

当k=5时，

$$\hat{P}^{(0)}(6) = 9.3569e^{0.1266*5} = 17.6214 \approx 18$$

$$\hat{X}_A^{(0)}(6) = 3499.109e^{0.2613*5} = 12923.0471$$

预测的下一个可能的跳变日期是$1990 + (\hat{P}^{(0)}(6) - 1) = 1990 + (18 - 1) = 2007$，2007年此省国内生产总值的预测值是$\hat{X}^{(0)}(6) = 12923.0471$亿元。

用线性回归模型$\hat{y} = -417.580 + 558.3746x$预测的2007年此省国内生产总值为9633.16亿元，而事实上2006年的实际国内生产总值已达12464.09亿元。显然，应用GM (1, 1)模型预测要比线性回归模型预测可靠得多。

当k=6时，

$$\hat{P}^{(0)}(7) = 9.3569e^{0.1266*6} = 19.9996 \approx 20$$

$$\hat{X}_A^{(0)}(7) = 3499.109e^{0.2613*6} = 16782.1058$$

预测的下一个可能的跳变日期是$1990 + (\hat{P}^{(0)}(7) - 1) = 1990 + (20 - 1) = 2009$，2009年此省国内生产总值的预测值是$X^{(0)}(7) = 16782.1058$亿元。

由上可知，这种组合模型在一定程度上反映了一个省省国内生产总值的变化规律，符合经济发展情况。

# 四、 灰色系统理论在人均可支配收入中的应用与分析

## 1. 预测模型

1) 数据处理

设指标序列$X^{(0)}$共有n个观察值$x^{(0)}(1)$，$x^{(0)}(2)$，$x^{(0)}(3)$，…，$x^{(0)}(n)$称为原始序列。对原始序列作累加生成得到新的序列$X^{(1)}$，其元素

$$x^{(0)}(k) = \sum_{i=1}^{k} x^{(0)}(i)，\text{k=1,2,3,…,n} \quad \cdots\cdots(15)$$

2) 建立灰色预测模型

利用灰色预测模型GM (1, 1)，对新序列 $X^{(1)}$ 建立微分方程

$$\frac{dx^{(1)}(t)}{dt}+ax^{(1)}(t)=u \qquad \cdots\cdots(16)$$

这是一阶一个变量的微分方程模型，其中参数a和u可以通过如下最小二乘法拟合得到

$$\begin{bmatrix} a \\ u \end{bmatrix}=(B^TB)^{-1}B^Ty_n \qquad \cdots\cdots(17)$$

在(17)式中，$y_n=[x^{(0)}(2),x^{(0)}(3),\ldots,x^{(0)}(n)]^T$

$$B=\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\left[x^{(1)}(1)+x^{(1)}(2)\right] & 1 \\ -\frac{1}{2}\left[x^{(1)}(2)+x^{(1)}(3)\right] & 1 \\ & \cdots \\ -\frac{1}{2}\left[x^{(1)}(n-1)+x^{(1)}(n)\right] & 1 \end{bmatrix}\cdots\cdots(18)$$

微分方程公式(16)的解为

$$\hat{x}^{(1)}(k+1)=\left[x^{(0)}(1)-\frac{u}{a}\right]e^{-ak}+\frac{u}{a}，\ k=1,2,3,\cdots,n \qquad \cdots\cdots(19)$$

由式(19)对一次累加生成序列的预测值 $\hat{x}^{(1)}(k)$，可以求得原始数据的还原值

$\hat{x}^{(0)}(k)=x^{(1)}(k)-x^{(1)}(k-1)$，其中k=2,3,⋯,n，$\hat{x}^{(0)}(1)=x^{(0)}(1)$。

3) 精度检验

- 计算下列各值

原始数据的模型计算值与其实际数值之间的残差值q(k)和相对误差值g(k)如下：

$$\begin{cases} q(k)=x^{(0)}(k)-\hat{x}^{(0)}(k) \\ g(k)=\dfrac{q(k)}{x^{(0)}(k)}*100\% \end{cases} \qquad \cdots\cdots(20)$$

原始均值 $\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x^{(0)}(k)$

原始方差 $S_1^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}[x^{(0)}(k)-\overline{x}]^2$

残差均值 $\overline{q}=\frac{1}{n-1}\sum_{k=2}^{n}q(k)$

残差方差 $S_2^2=\frac{1}{n-1}\sum_{k=2}^{n}[q(k)-\overline{q}]^2$

后验差比值$C=\frac{S_2}{S_1}$

小误差概率$P=P\{|q(k)-\bar{q}|<0.6745S_1\}$

- 用规定指标进行检验,检验是否合格
  按C与P两个指标，可综合评定预测模型的精度。

## 2. 对我国人均可支配收入预测分析的实例

我国1997 ～2006年城镇居民家庭人均可支配收入资料及一次累加生成数列见表3。

**表3.1997~2006年城镇居民家庭人均可支配收入**

| 年份 | 1997 | 1998 | 1999 | 2000 | 2001 | 2002 | 2003 | 2004 | 2005 | 2006 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^{(0)}(k)$ (元) | 5160. 3 | 5425. 1 | 5854. 0 | 6280. 0 | 6859. 6 | 7702. 8 | 8472. 2 | 9421. 6 | 10493. 0 | 11759. 45 |
| $x^{(1)}(k)$ (元) | 5160. 3 | 10585. 4 | 16439. 4 | 22719. 4 | 29579. 0 | 37281. 8 | 45754. 0 | 55175. 6 | 65668. 6 | 77428. 05 |

由(18)式得

$$B=\begin{bmatrix}-7872.85 & 1\\ -13512.4 & 1\\ -19579.4 & 1\\ -26149.2 & 1\\ -33430.4 & 1\\ -41517.9 & 1\\ -50464.8 & 1\\ -60422.1 & 1\\ -71548.325 & 1\end{bmatrix},\quad y_n=\begin{bmatrix}5425.1\\ 5854.0\\ 6280.0\\ 6859.6\\ 7702.8\\ 8472.2\\ 9421.6\\ 10493.0\\ 11759.45\end{bmatrix}$$

经计算得$\begin{bmatrix}a\\ u\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.1\\ 4408.8\end{bmatrix}$

于是人均可支配收入的灰色预测模型为：

$$x^{(1)}(k+1)=[x^{(0)}(1)-\frac{u}{a}]e^{-ak}+\frac{u}{a}=49248.3e^{0.1k}-44088$$

根据模型计算出拟合值，对模型进行残差检验得到如下结果，见表4。

**表4.误差表**

| $k$ | $x^{(0)}(k)$ | $\hat{x}^{(0)}(k)$ | 残差 $q(k)$ | 相对误差 $g(k)$ (%) |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 5160. 3 | 5160. 3 | 0 | 0 |
| 2 | 5425. 1 | 5179. 7 | 245. 4 | 4. 52 |
| 3 | 5854. 0 | 5724 | 130 | 2. 22 |
| 4 | 6280. 0 | 6326 | - 46 | - 0. 73 |
| 5 | 6859. 6 | 6992 | - 132. 4 | - 1. 93 |
| 6 | 7702. 8 | 7727 | - 24. 2 | - 0. 31 |
| 7 | 8472. 2 | 8539 | - 66. 8 | - 0. 79 |
| 8 | 9421. 6 | 9438 | - 16. 4 | - 0. 17 |
| 9 | 10493. 0 | 10430 | 63 | 0. 60 |
| 10 | 11759. 45 | 11527 | 232. 45 | 1. 98 |

由误差结果可见，相对误差绝对值不超过5%，该模型可靠。为了更具有说服力，用后验差检验如下：

计算得：$S_1 = 2134.90$，$S_2 = 126.32$，$C = \frac{S_2}{S_1} = 0.0592$，$P = P\{|q(k) - \bar{q}| < 0.6745 S_1\} = 1$

按照标准：当P>0. 95，C<0.35时，预测精度等级为"好"。说明该预测模型精度好，是可信的，因此可以用此模型进行预测。

## 3. 预测结果及分析

根据预测模型对我国城镇居民2007～2012年家庭人均可支配收入进行预测,结果见表5。

表5　城镇居民2007～2012年家庭人均可支配收入预测

| 年份 | 2007 | 2008 | 2009 | 2010 | 2011 | 2012 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 可支配收入（元） | 12739 | 14079 | 15560 | 17197 | 19005 | 21004 |

城镇居民家庭人均可支配收入是反映城市经济发展的综合指标，能全面反映城市经济面貌，并在一定程度上反映了城市的消费水平、收入水平、经济结构和发展趋势。随着近几年来,经济的不断发展,百姓手中可支配的钱逐年增多，而且随着经济的进一步发展，城镇居民可支配的收入也会进一步提高。根据预测，我国城镇居民家庭人均可支配收入在2009年达到15560元,在2012年将超过2万元。

引文：


[1] 邓聚龙. 灰色预测与决策[M]. 武汉:华中理工大学出版社, 19921

[2] 刘思峰,党耀国,方志耕. 灰色系统理论及其应用[M]. 北京:科学出版社, 2004

[3] 罗党,刘思峰. 灰色模型GM(1,1)优化[J]. 中国工程科学, 2003, 5 (8) : 50 - 53.

[4] 刘思峰,邓聚龙. GM(1,1)模型的适用范围[J]. 系统工程理论与实践, 2000 (5) : 121 - 124.

[5] 燕列雅,毛联霞. GM(1,1)模型应用[J]. 系统工程理论与实践, 1998 (10) : 104 - 106.

[6] 王清印. 灰色数学基础[M]. 武汉:华中理工大学出版社, 1996.

[7] 国家统计局. 中国统计年鉴1997～2006 [M]. 北京:中国统计出版社, 2007.

[8] 毛广雄,谭峰. 灰色系统分析应用-预测上海房地产市场需求量变化并对其影响因素做关联度分析[J]. 数学的实践与认识, 2005, (2).

[9] 张翠莲,张钦礼,何春江. 灰色系统理论在河北省城镇居民人均年收入预测中的应用[J]. 数学的实践与认识, 2005, (8).

[10] 汪琳媛 李曦.灰色模型在江西省国内生产总值（GDP）中的应用与分析[J].南昌大学学报：理科版，2006，30(5)：452-454.

[11] 曹殿立 何春花 李小芳.基于灰色线性回归组合模型的河南省国内生产总值预测[J].河南农业大学学报，2008，42(4)：469-472.

[12] 汪秋菊 索志林.农村劳动力供给灰色预测[J].农机化研究，2007(10)：40-42,45.

[13] 张霞 谢卫 魏巍.基于灰色理论的电力系统负荷预测模型[J].计算机辅助工程，2007，16(4)：19-22.

[14] 袁桂蓉 周伟.灰色系统理论在我国城镇居民家庭人均可支配收入中的应用[J].重庆电力高等专科学校学报，2008，13(3)：55-57.

[15] 黄玲花 韦国燕 覃思乾.广西城镇居民人均年收入的GM（1，1）模型预测[J].广西财经学院学报，2006，19(4)：19-22.

[16] 蒋世辉 黄士国 高丰有.基于灰色系统理论的住宅需求预测及政策建议[J].河南财政税务高等专科学校学报，2007，21(3)：62-64.